Curs 10 – *Reprezentarea suprafețelor riglate. Plane tangente*

10. Reprezentarea suprafeţelor curbe

Suprafeţele curbe sunt generate prin mişcarea unor linii drepte sau curbe, după anumite legi.

10.1 Clasificare

Suprafeţe riglate	**Suprafeţe neriglate**
• generatoarea o linie dreaptă	• generatoarea o curbă

10.2 Reprezentarea cilindrului oblic

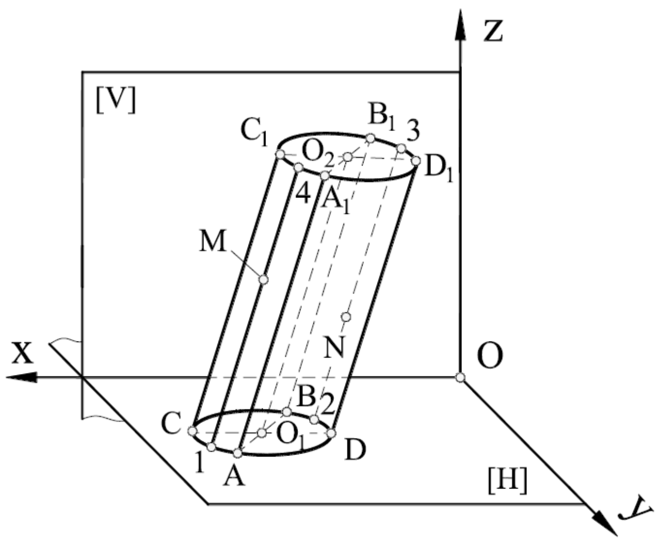


Fig. 10.1 Reprezentarea cilindrului oblic - reprezentare în spaţiu

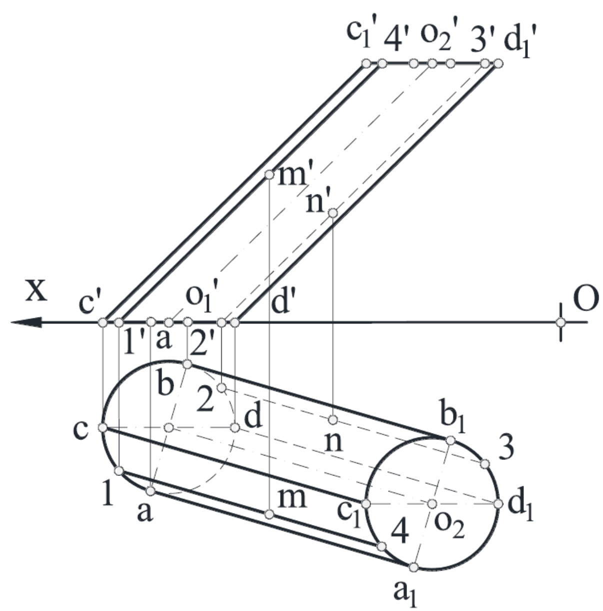


Fig. 10.2 Reprezentarea cilindrului oblic - reprezentare în epură

O_1O_2 – axa cilindrului

$O_1 \in [H]$,

$O_2 \in [N]$

$c'd' \subset Ox$

$c_1'd_1' \parallel Ox$

$M(m,m') \in$ cil.

$m \in 14$,

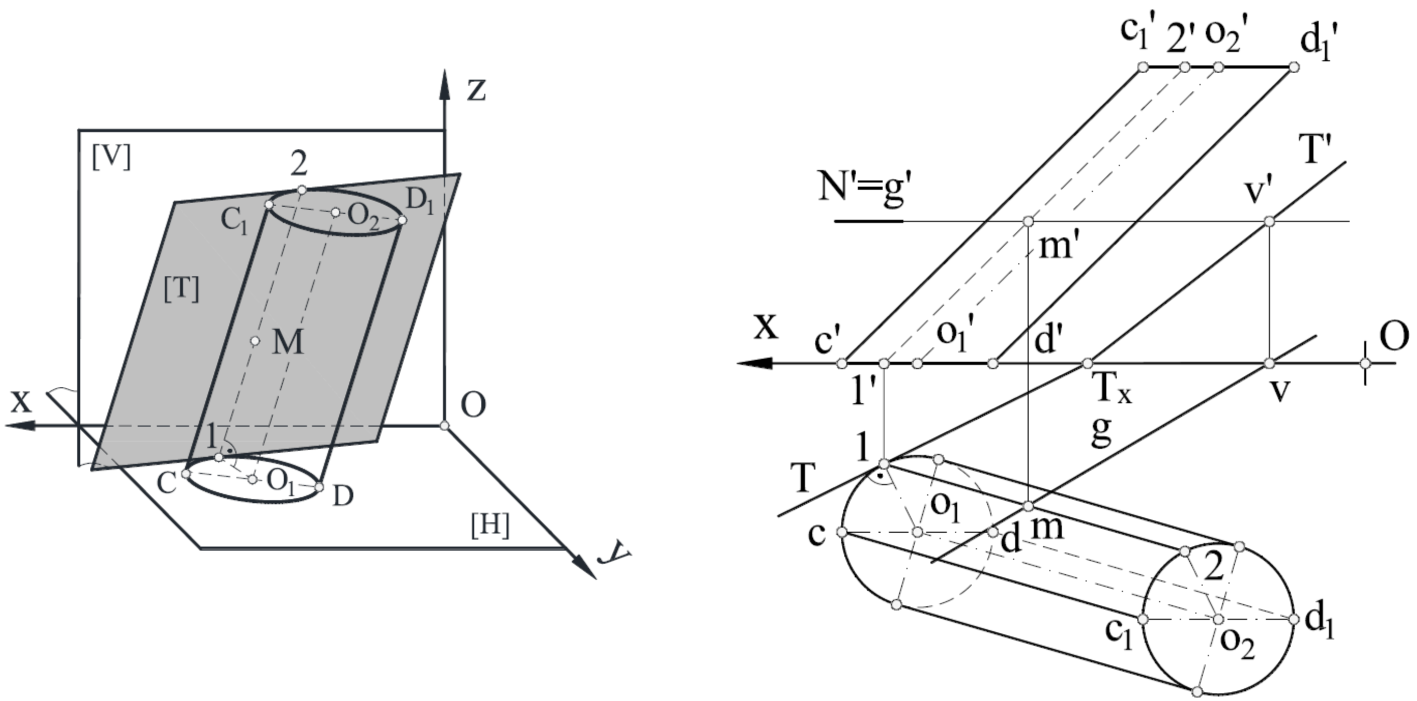
$m' \in 1'4'$

$N(n,n') \in$ cil.

$n \in 23$, $n' \in 2'3'$

Plan tangente la suprafața cilindrică

Planul tangent la suprafața unui cilindru conține generatoarea suprafeței pe care este situat punctul şi tangenta la curba directoare în punctul în care generatoarea o intersectează.



$M \in 12$

$m \in 12,\ m' \in 1'2'$

$T \perp 1o_1,\ T' = T_x \cup v'$

$G(g,g') \parallel [H],\ G \in [T]$

$M(m,m') \in G(g,g')$

$g \parallel T,\ g' \parallel Ox$

$G \cap [V] = V(v,v')$

Fig. 10.3 Plan tangente la suprafața cilindrică

Secțiuni plane în suprafețe cilindrice

a - $[P] \parallel O_1O_2$ sau $[P] \supset O_1O_2 \Rightarrow$ dreptunghi

b - $[P] \perp O_1O_2 \Rightarrow$ cerc

c, d - $\angle([P], O_1O_2) \neq 90^0 \Rightarrow$ elipsă sau porțiune de elipsă

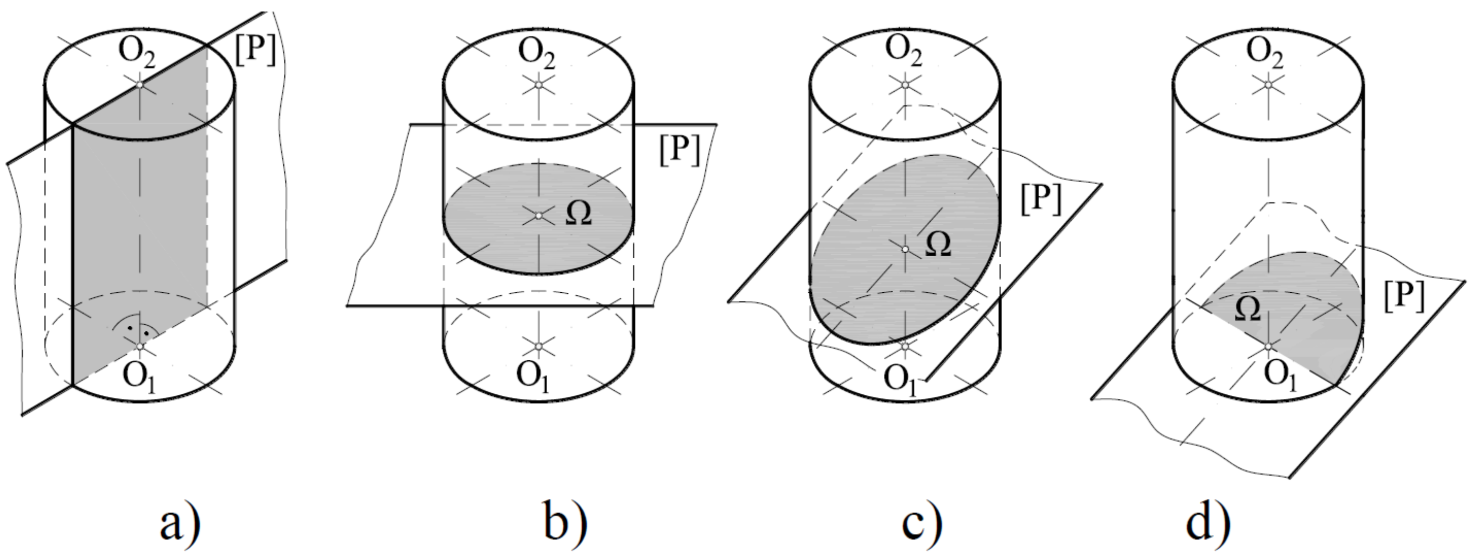
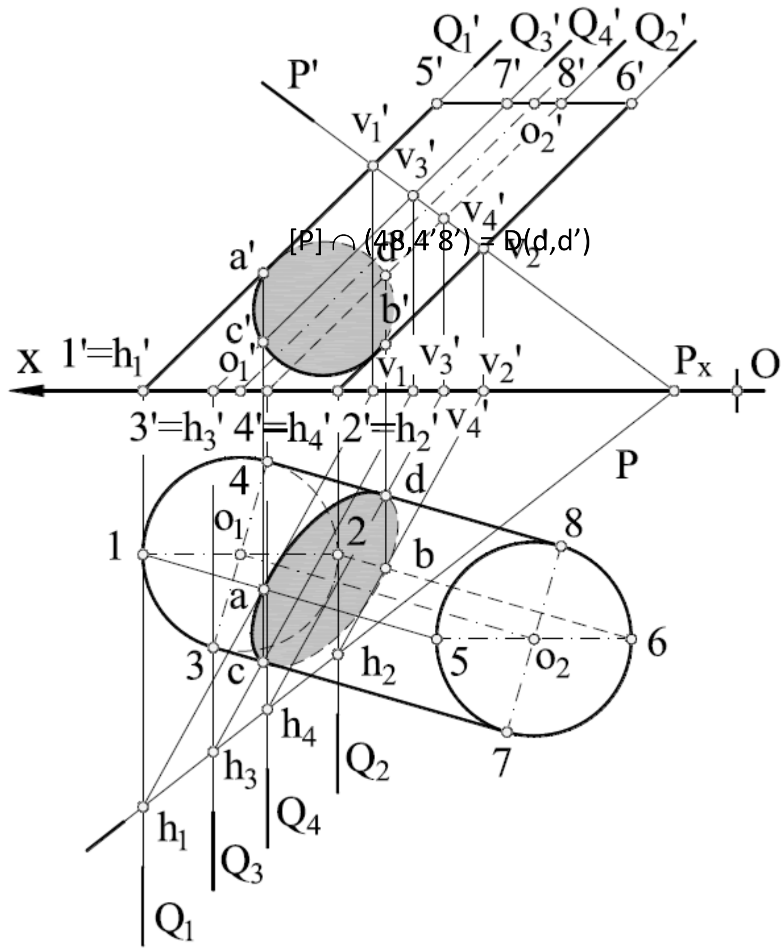


Fig. 10.4 Secţiuni plane în cilindrul circular drept

Secţiune plană în cilindrul oblic, determinată de un plan oarecare [P]



$[P] \cap \text{cil} = \text{elipsa}[ACBD]$

$[P] \cap (15,1'5') = A(a,a')$

$15 \subset [Q_1]$, $[Q_1] \perp [V]$

$[Q_1] \cap [P] = V_1H_1$

$15 \cap h_1v_1 = a$, $a' \in 1'5'$

$[P] \cap (26,2'6') = B(b,b')$

$[P] \cap (37,3'7') = C(c,c')$

Fig. 10.5 Secţiuni plane în cilindrul circular drept

Secţiune plană în cilindrul oblic, determinată de un plan de capăt [Q]

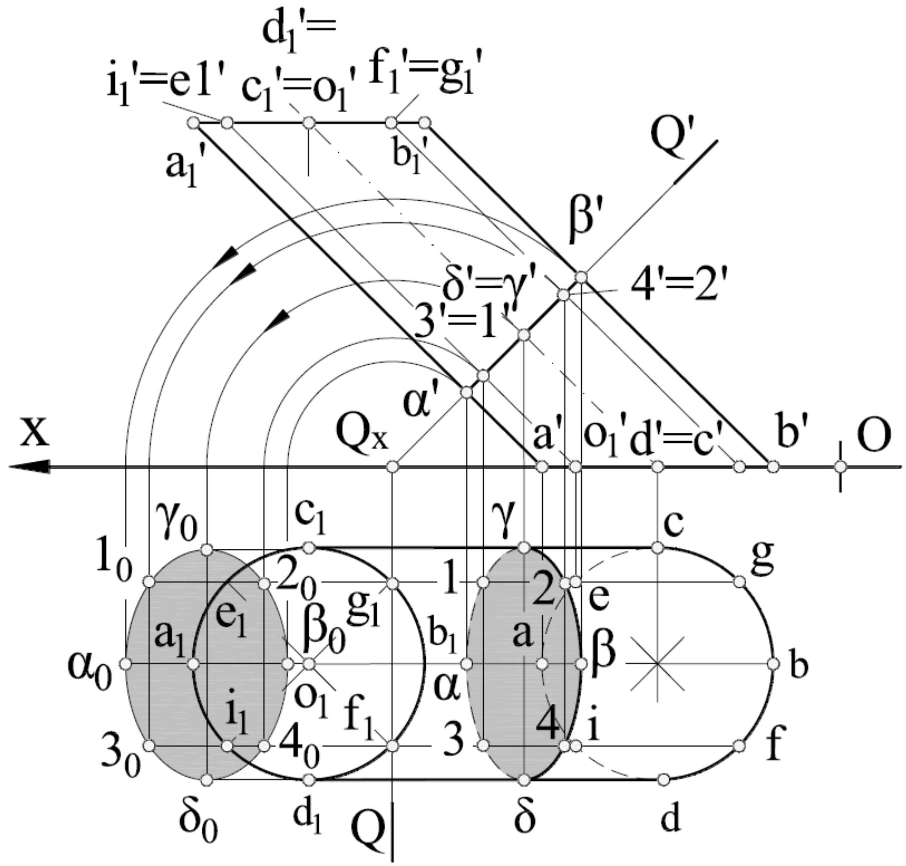


Fig. 10.6 Secţiuni plane în cilindrul circular drept

$[Q] \cap$ cil = elipsa $[\alpha\delta\beta\gamma]$

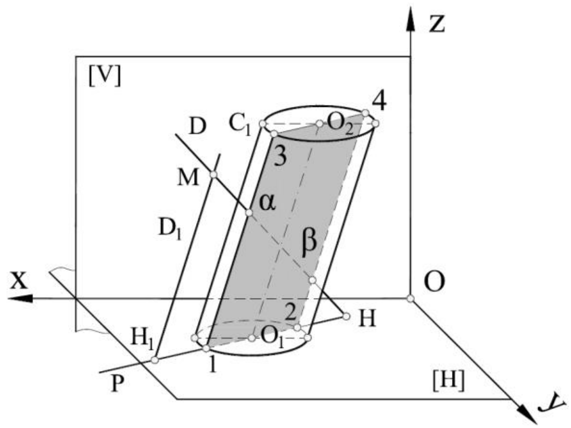
$[Q] \perp [V]$

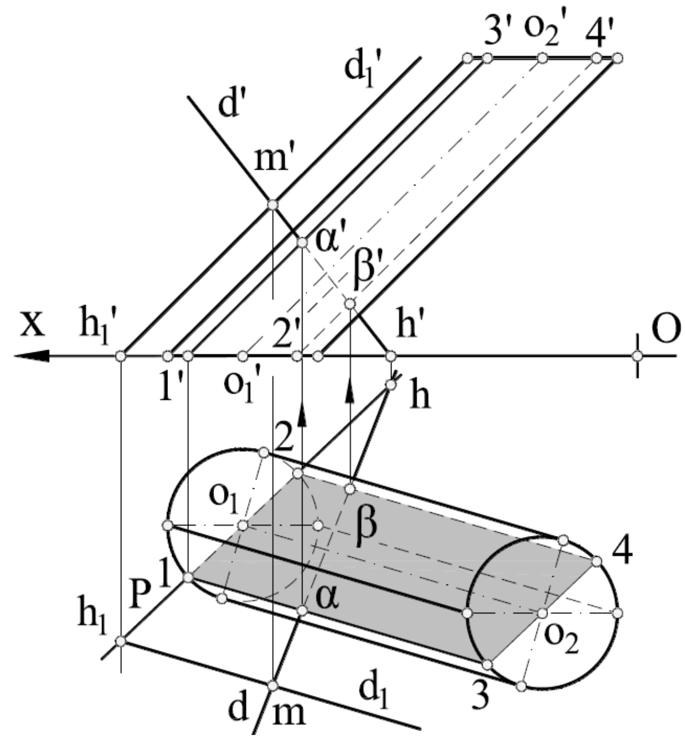
$\alpha'\delta'\beta'\gamma' \equiv Q'$

$\alpha_0\delta_0\beta_0\gamma_0$ – mărimea reală (prin rabatere pe [H])

Intersecţia suprafeţelor cilindrice cu drepte

Punctele de intersecţie dintre o dreaptă şi o suprafaţă cilindro-conică se determină prin metoda secţiunilor longitudinale, ducând prin dreaptă un plan auxiliar, determinat de două drepte concurente (dreapta dată şi una convenabil aleasă), care taie corpul longitudinal. Dreapta dată intersectează secţiunea determinată de planul auxiliar în punctele căutate.





Observaţii:

$[P] \cap$ cilindrul = [1243, 1'2'4'3'], $1243 \cap d = \alpha, \beta, \Rightarrow \alpha', \beta' \in d'$

$D(d,d') \cap$ cilindrul = $(\alpha,\alpha'), (\beta,\beta')$

$D \subset [P]$, $[P] = [D, D_1]$, $D_1 \parallel O_1O_2$, $D \cap D_1 = M$,

$D \cap [H] = H(h,h')$, $D_1 \cap [H] = H_1(h_1,h_1') \Rightarrow P = h \cup h_1$

Fig. 10.7 Intersecţia cilindrului cu o dreaptă

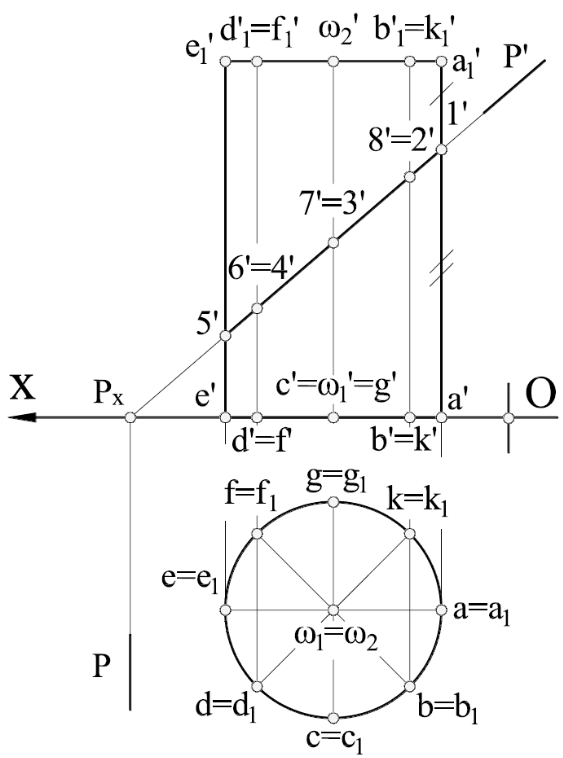
Desfăşurarea cilindrului drept şi a trunchiului de cilindru

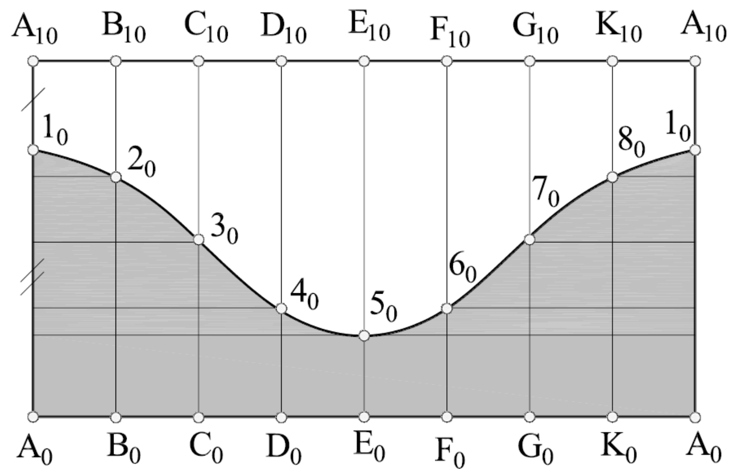
La desfăşurarea aproximativă a suprafeţelor curbe riglate se înscrie în curba lor directoare un poligon cu *n* laturi şi se desfăşoară suprafaţa poliedrală obţinută.

Teorema lui Olivier

Transformata prin desfăşurare a secţiunii făcute de un plan într un cilindru sau un con, prezintă inflexiuni în punctele în care planul tangent la suprafaţa cilindrică sau conică este perpendicular pe planul secant.

Puncte de inflexiun e punctele în care transformata curbei de secţiune îşi schimbă sensul concavităţii





Observaţii:

$[P] \perp [V]$, $A_0B_0 = ab$, $B_0C_0 = bc, \ldots K_0A_0 = ka$, $A_0A_{10} = a'a_1'$, $A_01_0 = a'1'$

3_0, 7_0 – puncte de inflexiune

Fig. 10.8 Desfăşurarea cilindrului drept şi a trunchiului de cilindru

Desfăşurarea cilindrului drept şi a trunchiului de cilindru - etape

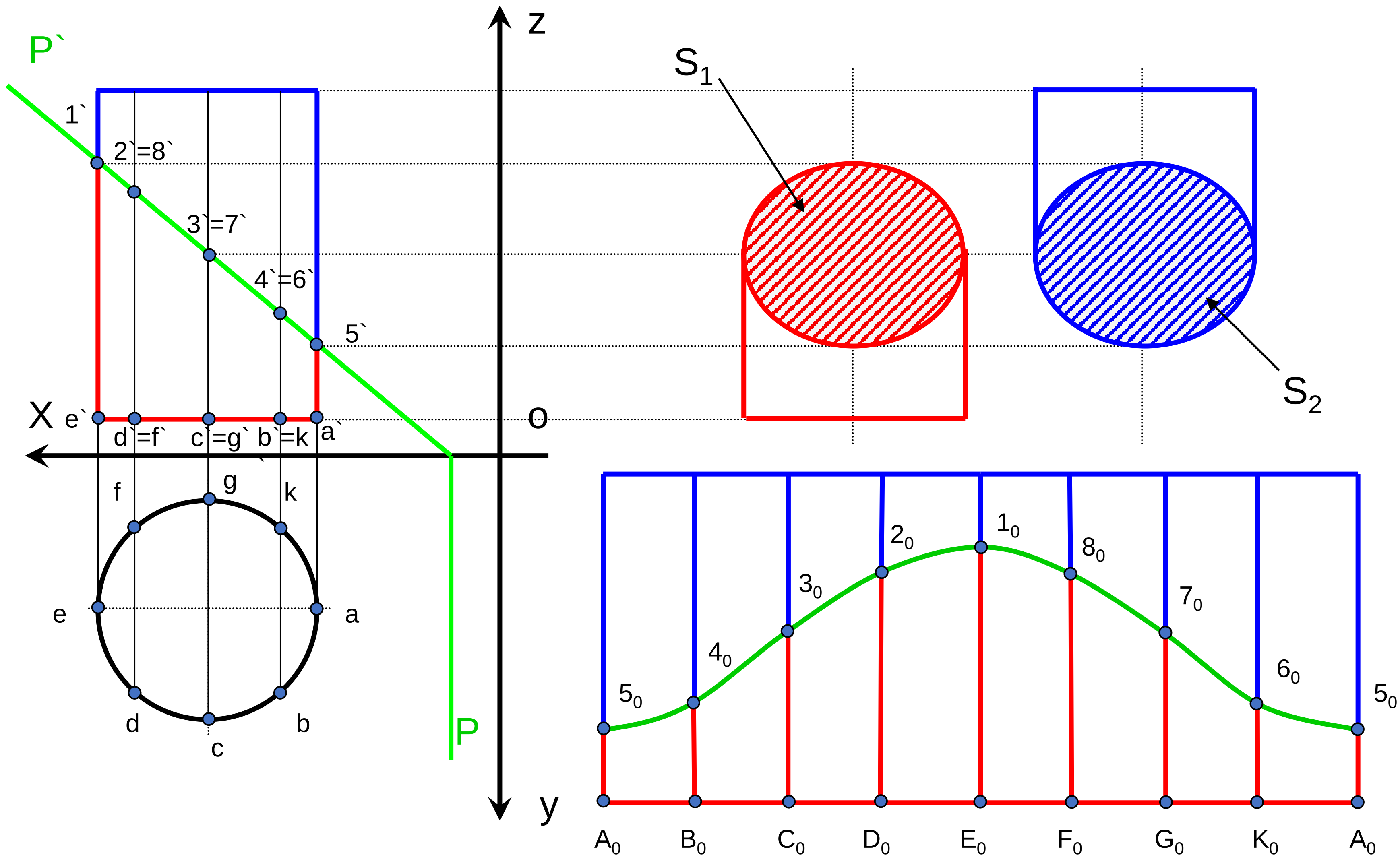
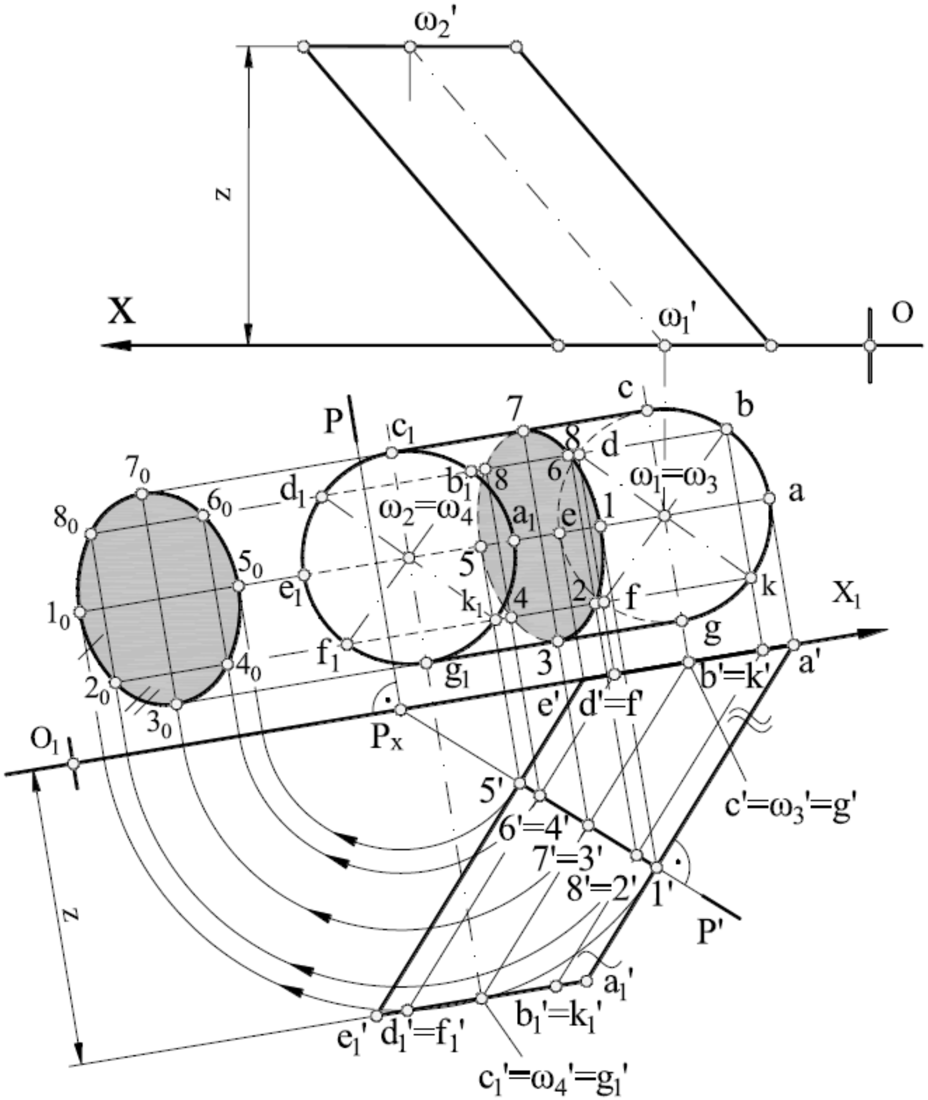
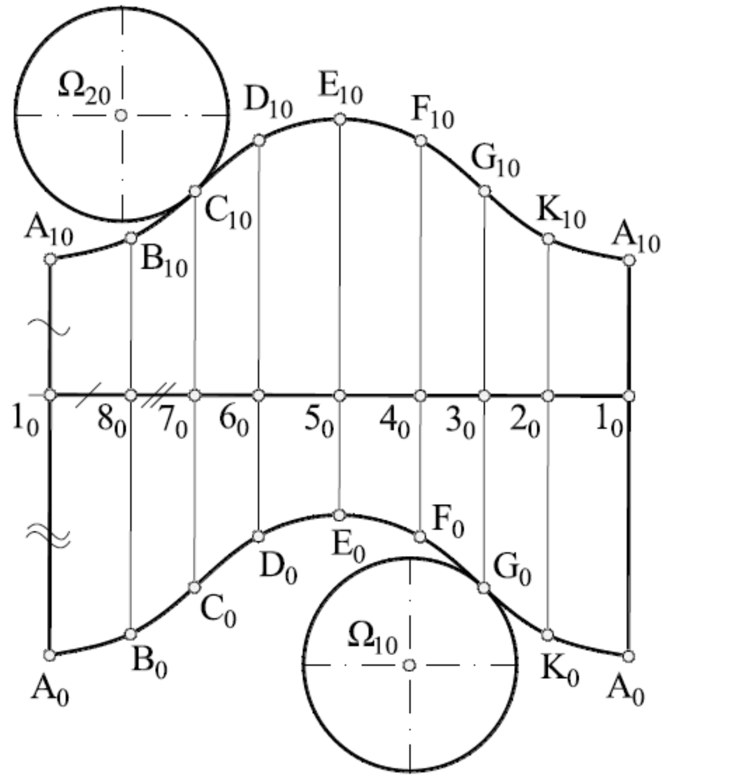


Fig. 10.8 Desfăşurarea cilindrului drept şi a trunchiului de cilindru

Desfăşurarea cilindrului oblic





Observaţii:

$O_1x_1 \parallel \Omega_1\Omega_2$, [P] $\perp$ $\Omega_3\Omega_4$, [P] $\cap$ cilindrul = [1,2,...8]
$[1_0,2_0,...8_0]$ – adevărata mărime a secţiunii normale
$12 = 1_02_0$, $23 = 2_03_0$,...$81 = 8_01_0$, $1_0A_0 = 1'a'$, $1_0A_{10} = 1'a_1'$

Fig. 10.9 Desfăşurarea cilindrului oblic

1.3. Reprezentarea suprafeţelor curbe

10.2 Reprezentarea conului oblic

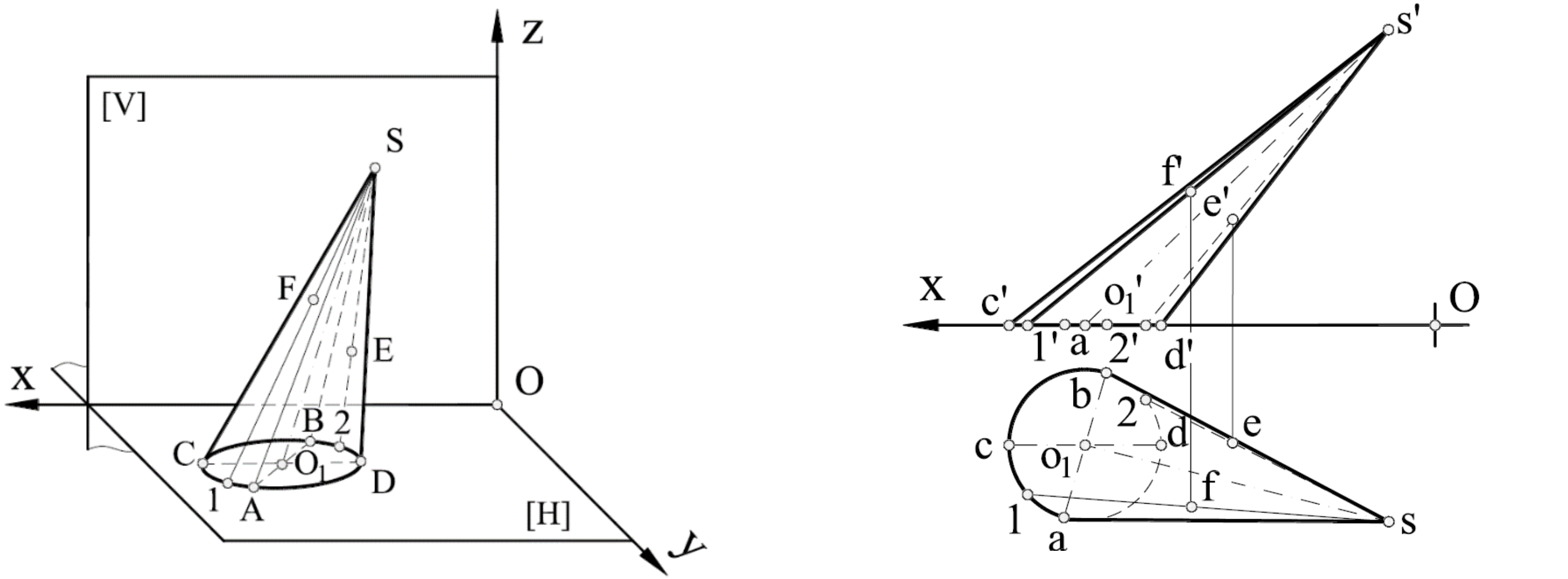
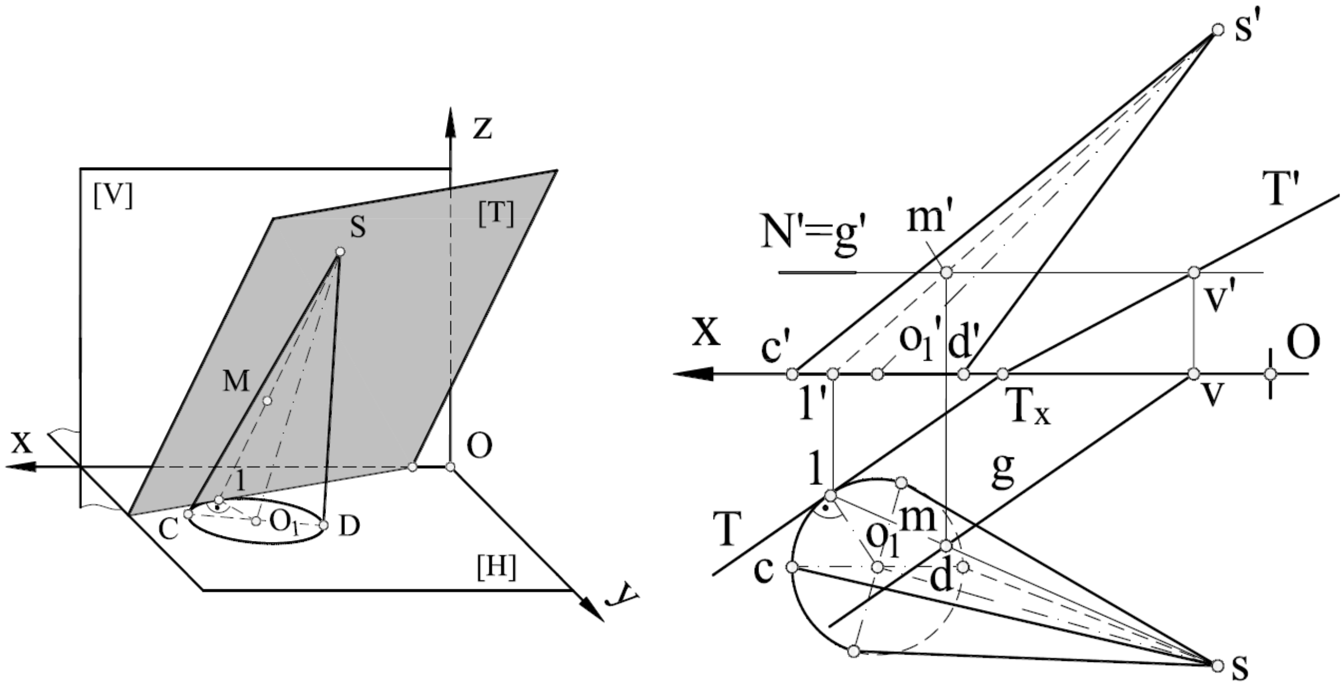


Fig. 10.10 Reprezentarea conului oblic - reprezentare în spațiu și în epură

Plan tangent la suprafaţa conică – prin punct pe suprafața conică

Planul tangent la suprafața unui con conține generatoarea suprafeței pe care este situat punctul şi tangenta la curba directoare în punctul în care generatoarea o intersectează.



$M \in 1S$

$m \in 1s$, $m' \in 1's'$

$T \perp 1o_1$, $T' = T_x \cup v'$

$G(g,g') \parallel [H]$, $G \in [T]$

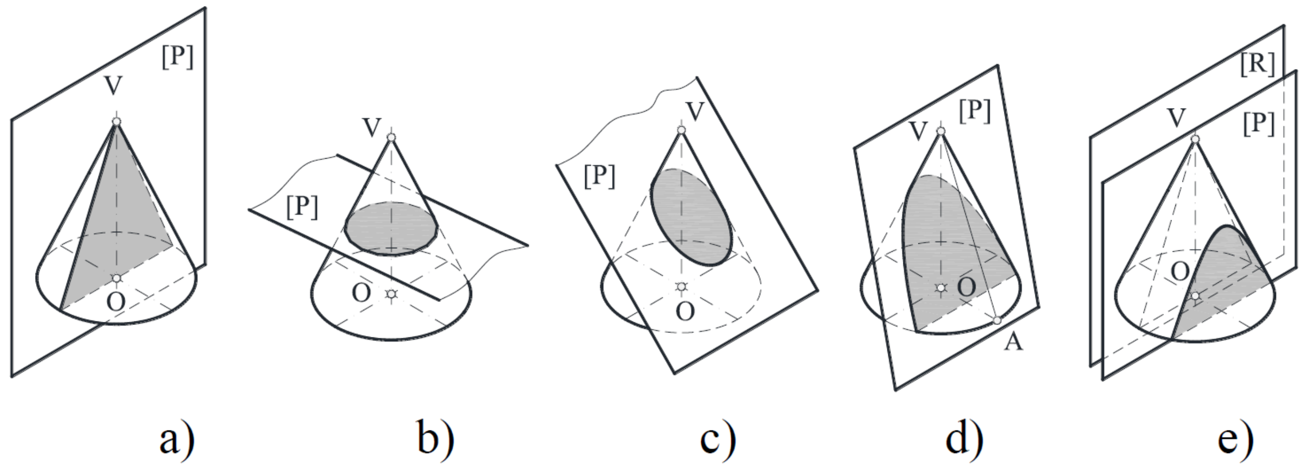
$M(m,m') \in G(g,g')$

$g \parallel T$, $g' \parallel Ox$

$G \cap [V] = V(v,v')$

Fig. 10.11 Plan tangente la suprafaţa conică

Secţiuni plane în suprafeţe conice



a - [P] || OV sau [P] $\supset$ OV $\Rightarrow$ triunghi

b - [P] $\perp$OV $\Rightarrow$ cerc

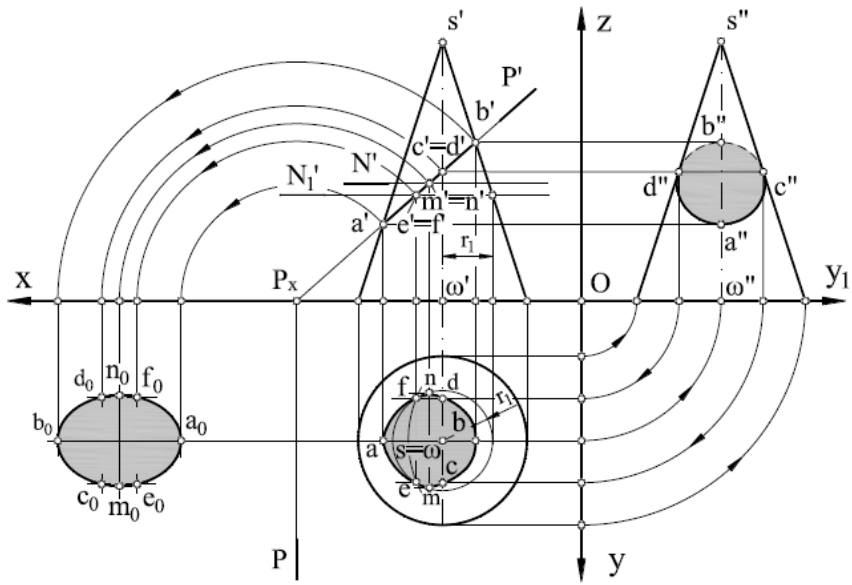
c - < ([P],OV) $\neq 90^0 \Rightarrow$ elipsă

d – [P] || VA $\Rightarrow$ parabolă

e - [P] || [R], V $\in$ [R] $\Rightarrow$ hiperbolă

Fig. 10.12 Secţiuni plane în conul drept

Secţiuni plane în con

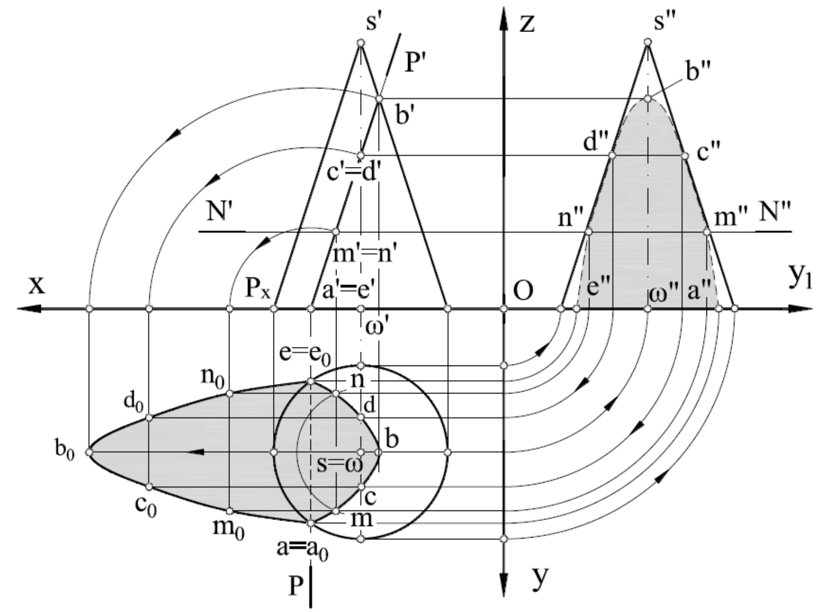


[P] ∩ con = elipsa[ACBD]

[P] ⊥ [V]

a’c’b’d’≡ P’

$a_0c_0b_0d_0$ - mărimea reală (prin rabatere pe [H])



[P] ∩ con = parabola[ABE]

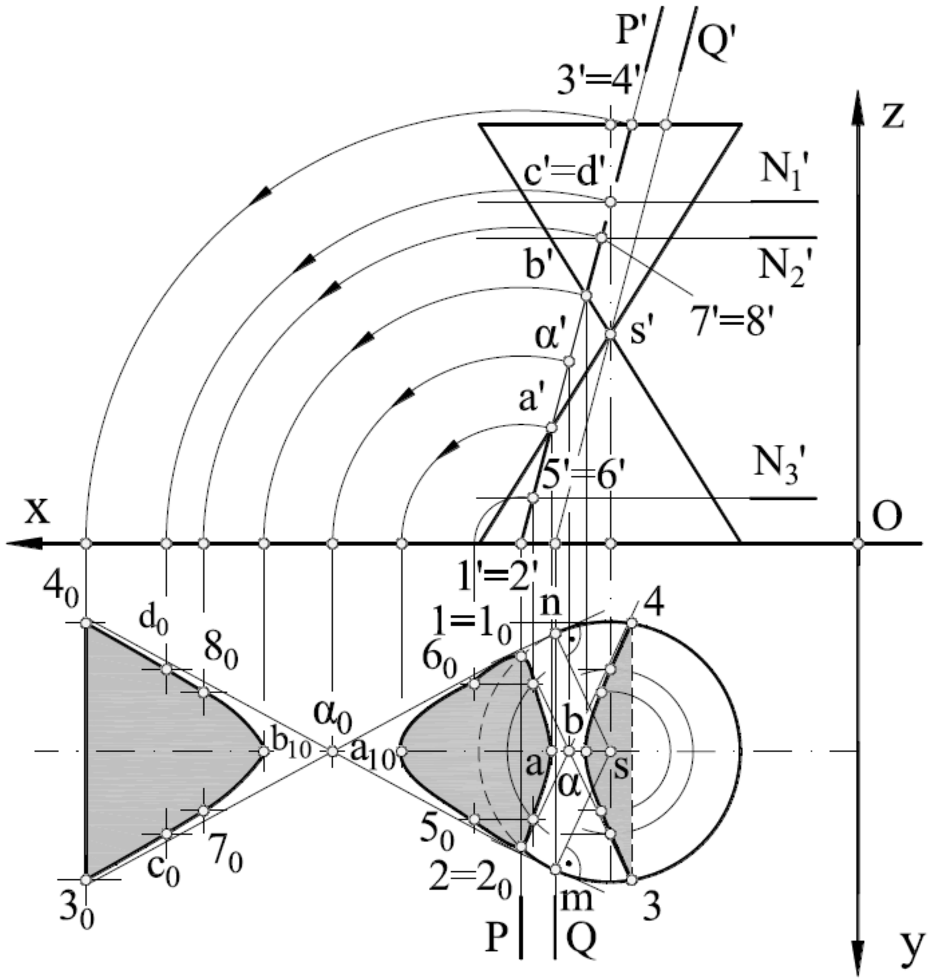
[P] ⊥ [V], P || SA

$e'b_1'a' \equiv P'$

$a_0b_0e_0$ - mărimea reală (prin rabatere pe [H])

Fig. 10.13 Secţiuni plane în conul drept

Secţiuni plane în con



[P] ∩ con = hiperbola [1A2], [3B4]

[P] || [Q], S ∈ [Q]

αm_1, αn_1 - asimptotele hiperbolelor

αm_1 || sm, αn_1 || sn

(α,α') - centrul hiperbolelor

$[1_0 a_{10} 2_0]$, $[3_0 b_{10} 4_0]$ - mărimea reală

(prin rabatere pe [H])

Fig. 10.14 Secţiuni plane în conul drept

Secţiune plană în conul oblic, determinată de un plan oarecare [P]

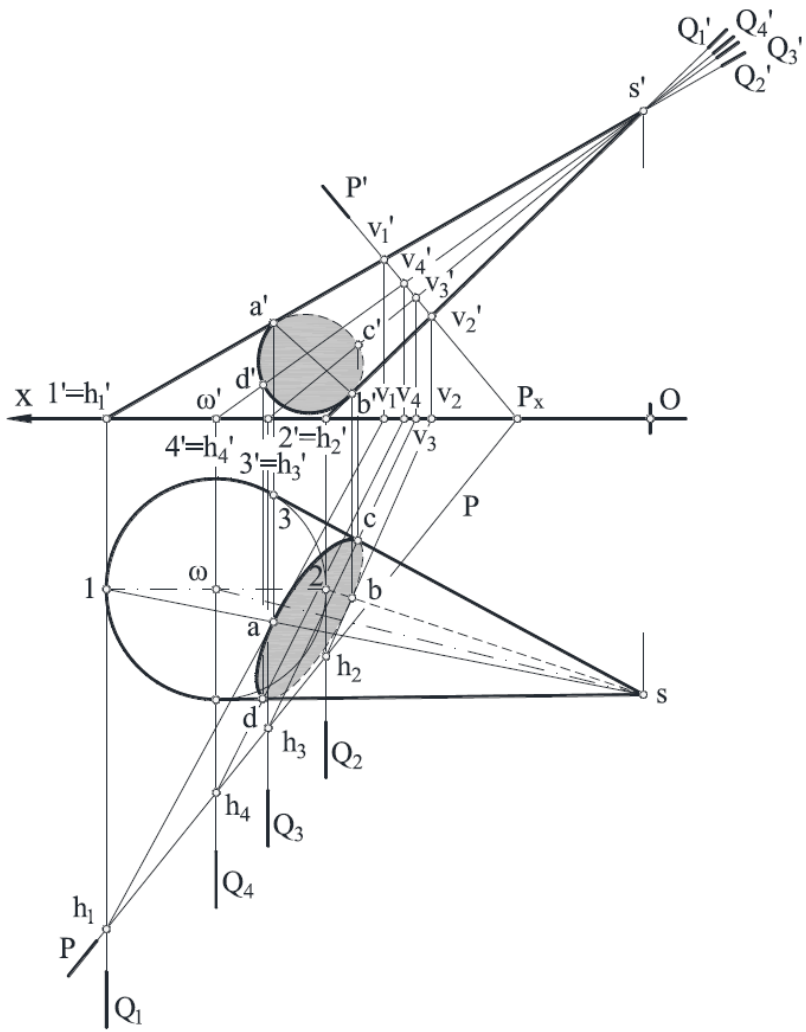


Fig. 10.15 Secţiunea în con cu un plan oarecare

$[P] \cap (2s, 2's') = B(b, b')$

$[P] \cap (3s, 3's') = C(c, c')$

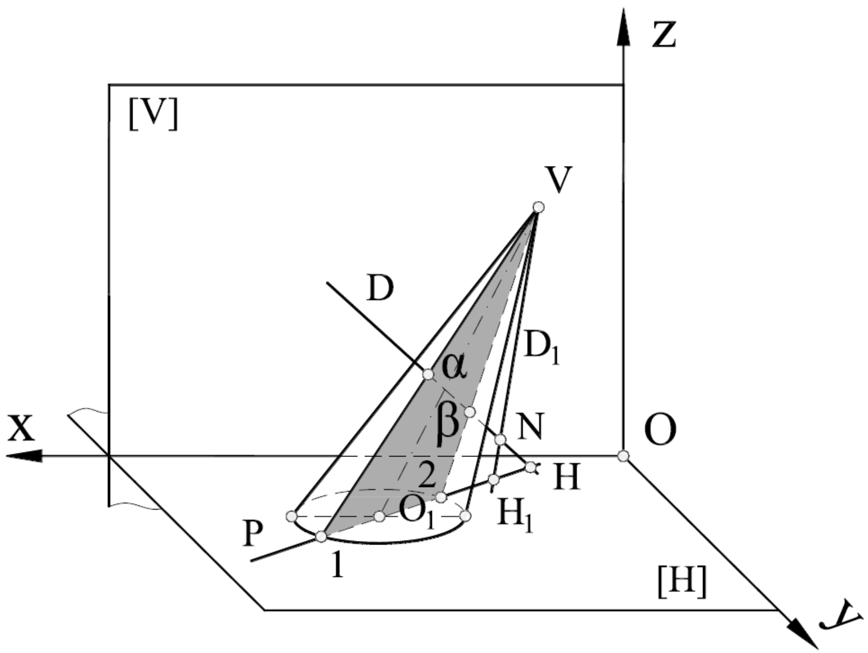
$1S \subset [Q_1]$, $[Q_1] \perp [V]$

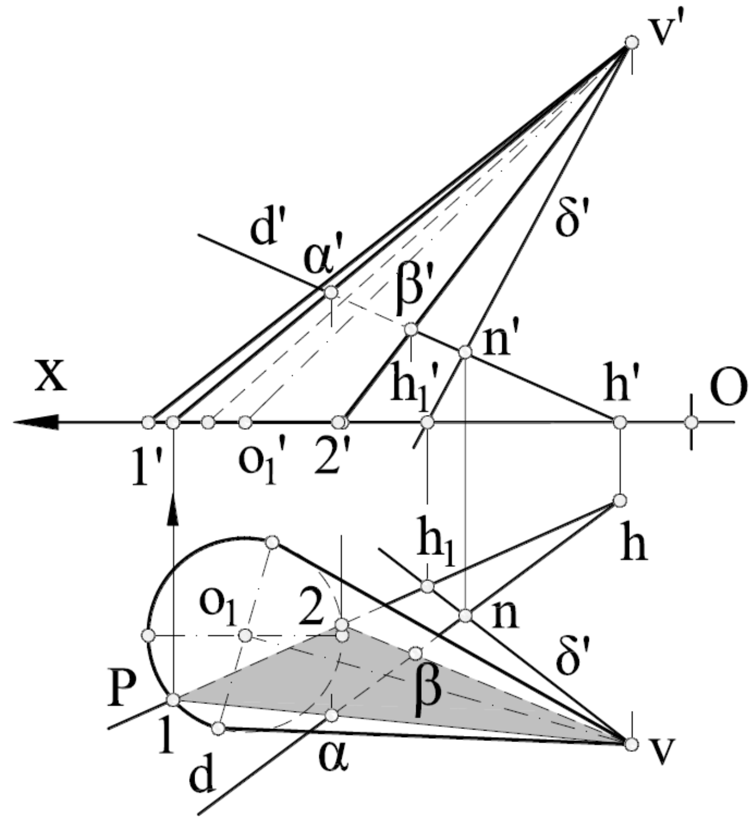
$[Q_1] \cap [P] = V_1H_1$

$1s \cap h_1v_1 = a$, $a' \in 1's'$

$[P] \cap (4s, 4's') = D(d, d')$

Intersecţia conului cu o dreaptă oarecare





Observaţii:

$D(d,d') \cap$ conul $= (\alpha,\alpha'), (\beta,\beta')$

$D \subset [P]$, $[P] = [D, D_1]$, $D \cap D_1 = N$, $D_1 = N \cup V$

$D \cap [H] = H(h,h')$, $D_1 \cap [H] = H_1(h_1,h_1') \Rightarrow P = h \cup h_1$

$[P] \cap$ conul $= \Delta(1v2, 1'v'2')$, $1v2 \cap d = \alpha, \beta, \Rightarrow \alpha', \beta' \in d'$

Fig. 10.16 Intersecţia conului cu o dreaptă oarecare

Desfăşurarea conului drept şi a trunchiului de con

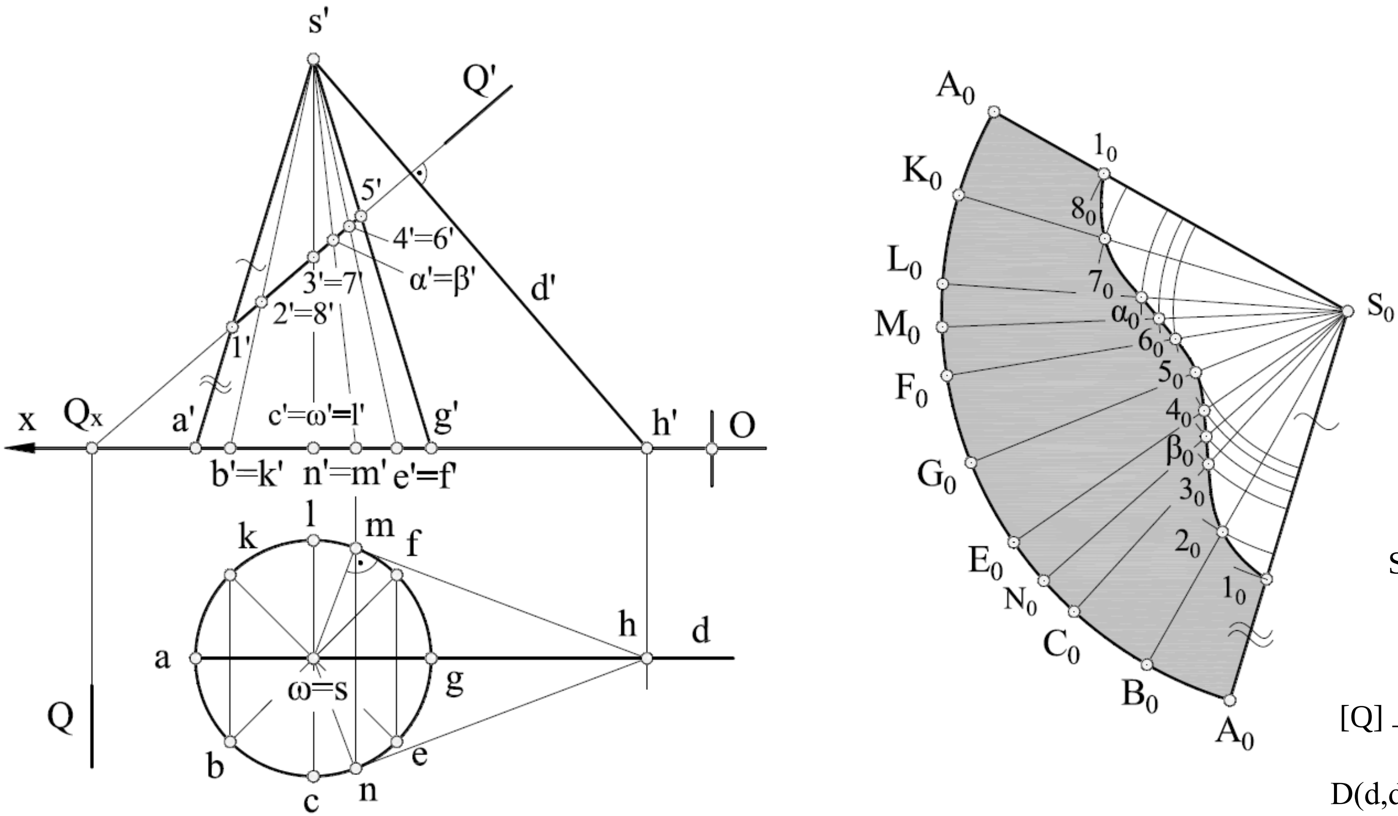


Fig. 10.17 Desfăşurarea conului drept şi a trunchiului de con

Observaţii:

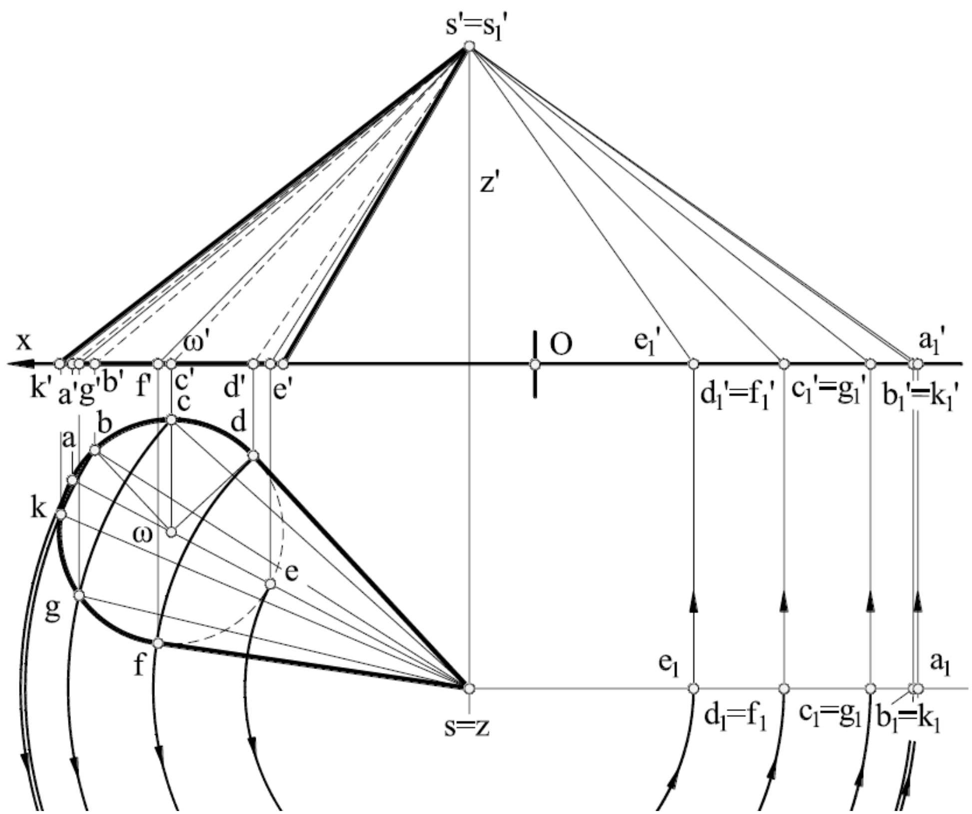
S_0A_0 = s'a', SA || [V], A_0B_0 = ab, B_0C_0 = bc,...K_0A_0 = ka,

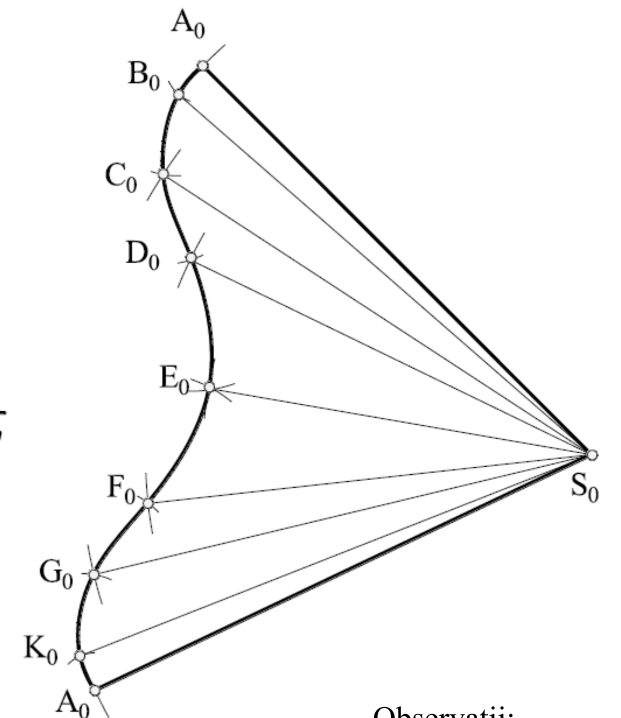
[Q] ⊥ [V], S_01_0 = s'1', S_02_0 = s'2_1', S_03_0 = s'3_1'

D(d,d') ⊥ [Q], S ∈ D, ⇒ SM, SN - generatoarele de tangenţă, ⇒ s'm' ∩ Q' = α' ≡ β'

α_0, β_0 – puncte de inflexiune

Desfăşurarea conului oblic





Observaţii:

$SA(sa,s'a') \rightarrow SA_1(sa_1,s'a_1')$, rotaţie de nivel
$Z(z,z') \perp [H]$, $S \in Z$ $SA_1 \parallel [V]$,
$S_0A_0 = s'a_1'$, $a_0b_0 = ab$,...
D_0, F_0 – puncte de inflexiune

Fig. 10.18 Desfăşurarea conului oblic